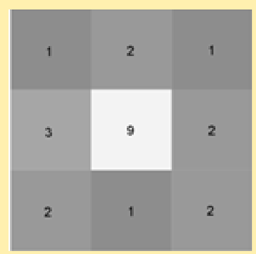
Középpontban az elfeledett közép



Pályázó:

HARGITAI SÁRA, 11. évf.

Gödöllői Református Líceum Gimnázium

Felkészítő tanár:

UNYI TAMÁS

Gödöllői Református Líceum Gimnázium

A LEGISMERTEBB KÖZEPEK

Közép neve	*Képlet*	*Jelölés*	*Előfordulás*
számtani	$\frac{a+b}{2}$	A	átlagszámítás
mértani	$\sqrt{a \cdot b}$	G	magasság- és befogótétel, mértani sorozat, aranymetszés
harmonikus	$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} = \frac{2ab}{a+b}$	H	párhuzamosan kapcsolt ellenállások, leképezési törvény
négyzetes	$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$	Q	szórás (statisztika)

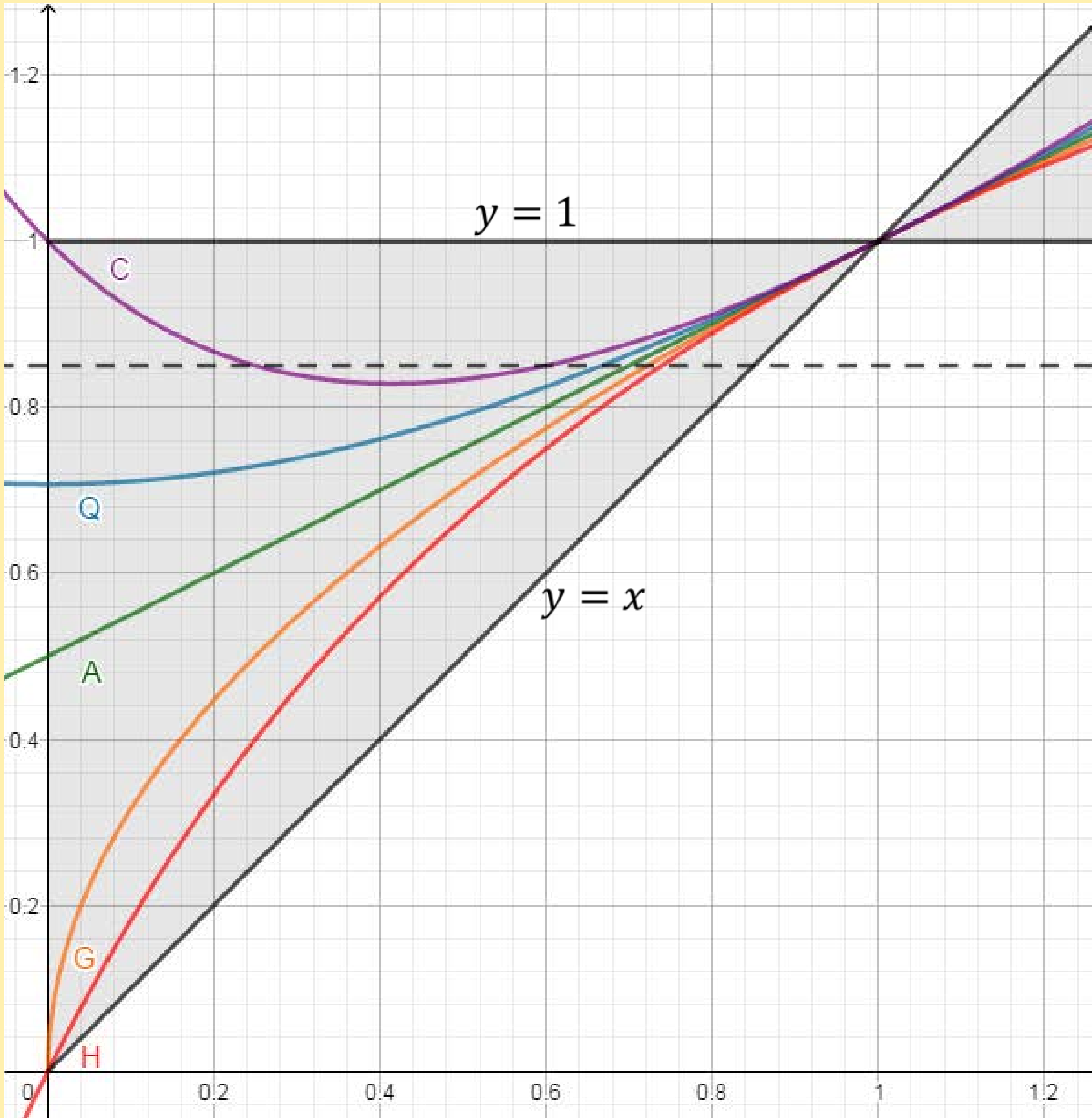
A KONTRAHARMONIKUS KÖZÉP

$$C(a,b) = \frac{a^2 + b^2}{a + b}$$

Karakterisztikus függvény:

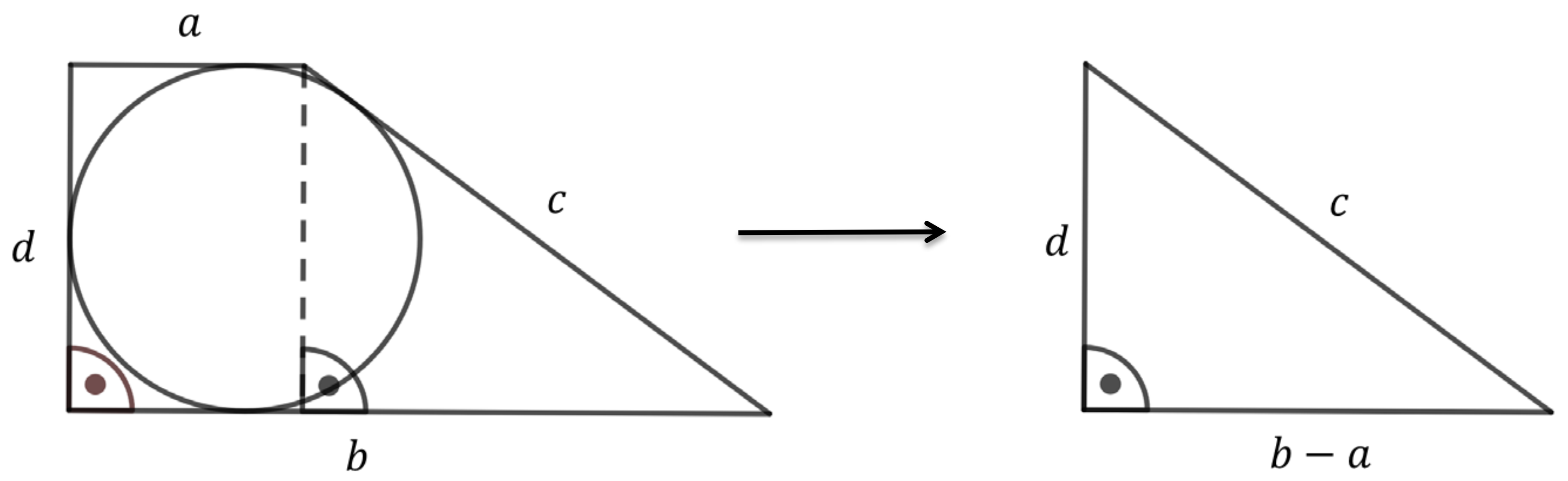
$$f_C(x) = \frac{x^2 + 1}{x + 1}$$

- $f_C(x)$-nek minimuma van
- $C(2;6) = 5 = C(3;6)$
- $f_A(x), f_G(x), f_H(x), f_Q(x)$ szig. mon. nő
- A,G,H,Q izoton közepek
- C viszont nem izoton közép



PAHIKKALA TÉTELE

Tétel: I. Ha $a \neq b$ és $a, b, C(a,b) \in \mathbb{N}^+$, akkor $C(a,b)$ egy pitagoraszi számhármas legnagyobb tagja.



$$\left.\begin{array}{l} a+b=c+d \\ (b-a)^2+d^2=c^2 \end{array}\right\} \longrightarrow \begin{array}{l} d=\dfrac{2ab}{a+b}=H(a;b) \\ c=\dfrac{a^2+b^2}{a+b}=C(a;b) \end{array}$$

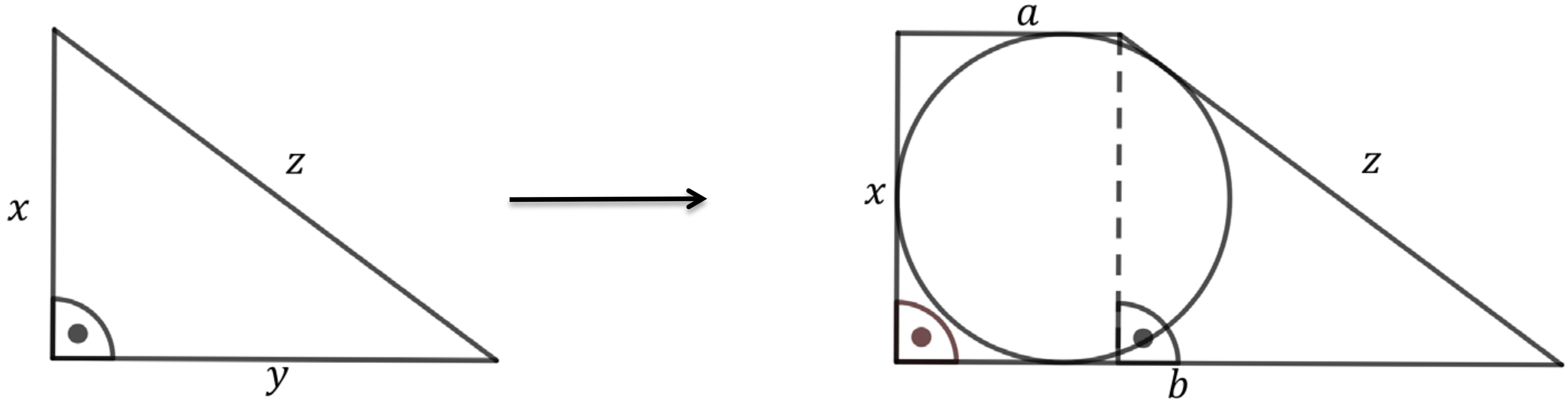
$b-a \in \mathbb{N}^+$

$d \in \mathbb{N}^+$

$c \in \mathbb{N}^+$

Pahikkala tétele

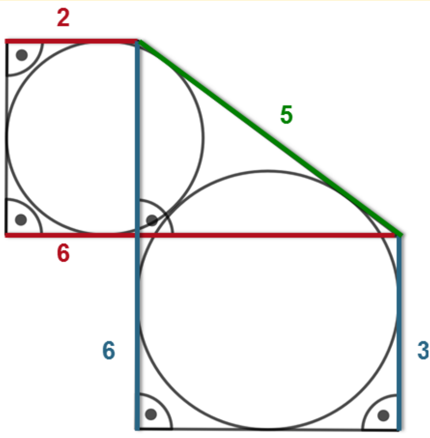
Tétel: II. Ha (x, y, z) pitagoraszi számhármas, akkor létezik $a, b \in \mathbb{N}^+ : C(a, b) = z$



$$\left.\begin{aligned} a + b &= x + z \\ b &= y + a \end{aligned}\right\} \longrightarrow \begin{aligned} a &= \frac{x - y + z}{2} = n(m+n) \in \mathbb{N}^+ \\ b &= \frac{x + y + z}{2} = m(m+n) \in \mathbb{N}^+ \end{aligned}$$

$$x = 2mn$$
$$y = m^2 - n^2$$
$$z = m^2 + n^2$$

$m > n$ és $m, n \in \mathbb{N}^+$



C nem izoton ⟵ C(2;6) = 5 = C(3;6)

A LEHMER-KÖZEPEK

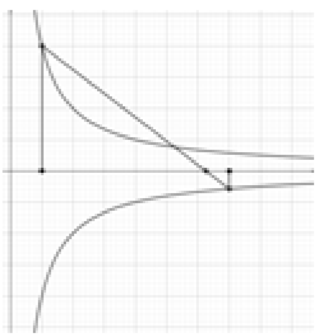
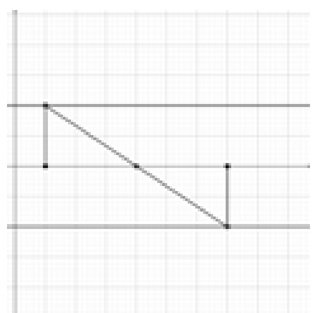
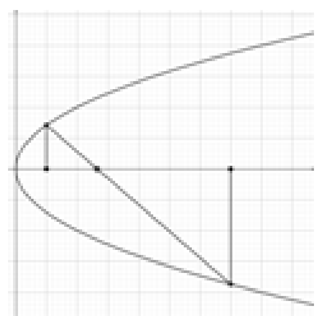
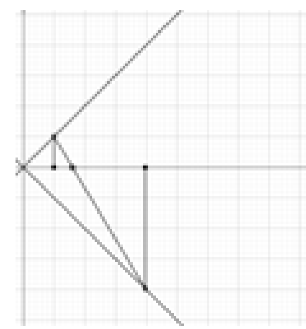
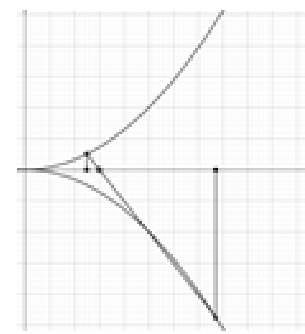
$$C(a,b) = \frac{a^2+b^2}{a+b}$$

Általánosan: $$\frac{a^{k+1}+b^{k+1}}{a^k+b^k} = L_k(a,b)$$

k paraméterű Lehmer-közepek

Tétel: $-1 \le k \le 0$ esetén $L_k(a,b)$ izoton, $k < -1$, ill. $k > 0$ esetén viszont nem izoton.

Biz.: A Moskovitz–Mays-féle eljárással

№	1.	2.	3.	4.	5.
					
k	1	0	−1/2	−1	−2
$g(x) = x^{-k}$	$1/x$	konstans	$\sqrt{x}$	x	x^2
L_k	C	A	G	H	L_{-2}

Ha $-1 \le k \le 0$, akkor $g(x)$ nemkonvex (2., 3. és 4. oszlop) és L_k izoton.

Ha $k < -1$, vagy $k > 0$, akkor $g(x)$ konvex (1. és 5. oszlop) és L_k nem izoton.

b;-g(b) G H L_{-2}

KONTRAHARMONIKUS SZÁMOK

Def.: n osztóinak kontraharmonikus közepe: $C(n) = \dfrac{\text{n osztóinak négyzetösszege}}{\text{n osztóinak összege}}$

Def.: n kontraharmonikus szám, ha $C(n) \in \mathbb{N}^+$

Tétel: Minden négyzetszám kontraharmonikus szám.

Tétel: Végtelen sok olyan kontraharmonikus szám van, amelyik nem négyzetszám.

Tétel: Páratlan kitevőjű prímhatvány nem lehet kontraharmonikus szám.

Sejtés: Ha egy pozitív egész szám négyzetmentes, akkor nem lehet kontraharmonikus szám.

Tétel: Egy négyzetszám osztóinak kontraharmonikus közepe páratlan szám.

Sejtés: Bármely kontraharmonikus szám osztóinak kontraharmonikus közepe páratlan szám.

Példák

	n	$C(n)$
→	1	1
→	4	3
→	9	7
→	16	11
→	20	13
→	25	21
→	36	21
→	49	43
→	50	35
→	64	43
→	81	61
→	100	63
→	117	85

KÖSZÖNÖM A FIGYELMET!

Források:

- Beckenbach, E. F.: A class of mean value functions. *The American Mathematical Monthly*, **57.** No. 1. (1950), 1-6.
- Borwein, J. M. & Borwein, P. B.: Pi and the AGM. A study in analytic number theory and computational complexity. John Wiley, New York, 1987
- Bullen, P. S.: Handbook of means and their inequalities. Springer Science+Business Media, Dordrecht, 2003
- Hischer, H.: Viertausend Jahre Mittelwertbildung. *mathematica didactica*, **25.** No. 2. (2002), 3-51.
- Lambert, A. & Herget, W.: Mächtig viel Mittelmaß in Mittelwert-Familien. *Der Mathematikunterricht*, **50.** No. 5. (2004), 55-66.
- Lehmer, D. H.: On the compounding of certain means. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **36.** (1971), 183-200.
- Mays, M. E.: Functions which parametrize means. *The American Mathematical Monthly*, **90.** No. 10. (1983), 677-683.
- Moskovitz, D.: An alignment chart for various means. *The American Mathematical Monthly*, **40.** No. 10. (1933), 592-596.
- Ore, O.: Bevezetés a számelmélet világába. Gondolat, Budapest, 1977
- Ore, O.: On the averages of the divisors of a number. *The American Mathematical Monthly*, **55.** No. 10. (1948), 615-619.
- Pahikkala, J.: On contraharmonic mean and Pythagorean triples. *Elemente der Mathematik*, **65.** No. 2. (2010), 62-67.
- Toader, Gh. & Toader, S.: Greek means and the arithmetic-geometric mean. RGMIA Monographs, Victoria University, 2005

Köszönöm a segítséget:

- Dr. Jakab László professzor úrnak (BME)
- Ivánka Gábor úrnak (ARINOVA)
- Dr. Freud Róbert docens úrnak (ELTE)
- Pertis Szabolcs tanár úrnak (GRL)
- Rémenyi Márton diák úrnak (GRL)

Előadásom videón:

https://www.youtube.com/watch?v=Y1ZNTzhLAZw